Bernd Streitberg und Klaus Balzer
DER KLANG DER MATHEMATIK

Schlagworte:

Fraktale, chaotische Systerne, simulated annealing, akustische Darstellung von EEG-Daten, Kontrapunkt, MORSE-Sequenzen, additive fraktale Klangsynthese.

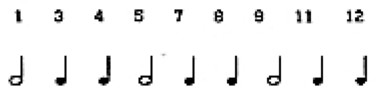
(1) Einführung

Mathematische Objekte können, setzt man sie ins Visuelle um, faszinierend schöne Bilder erzeugen. Bekannt sind die Arbeiten von Benoit MANDELBROT (fractals) und der Forschungsgruppe Bremen ("Julia-Mengen"). In unserem Aufsatz untersuchen wir die akustische Darstellung mathematischer Objekte.

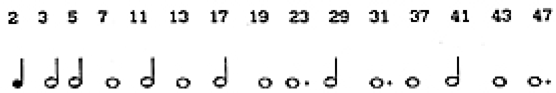
(2) Variationen über Primzahlen

Musik ereignet sich in der Zeit. Die Zeit wird durch Rhythmen strukturiert, wobei wir mathematisch einen Rhythmus als eine monoton steigende Folge natürlicher Zahlen darstellen können: $a_1, a_2, \dots a_n$. Der Einsatzpunkt des n-ten Tones in einer Komposition wird als a_n bezeichnet und kann durch eine natürliche Zahl gegeben werden, sobald man sich auf eine grundlegende Quantisierung der Zeit geeinigt hat.

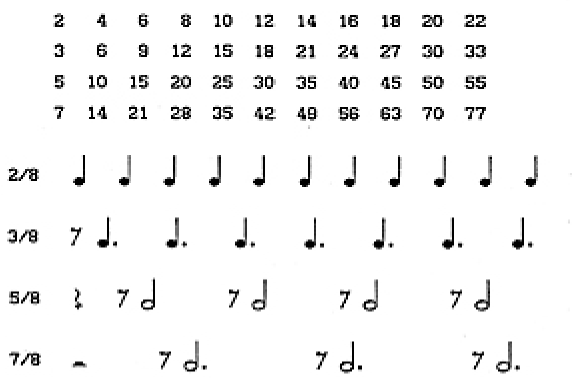
Konstante Rhythmen entsprechen Folgen, deren Differenzen 1. Ordnung periodisch sind:



Welcher Rhythmus wird durch die Folge der Primzahlen erzeugt:



Es handelt sich hier um keinen regelmäßig metrischen Rhythmus, er erscheint jedoch im Gegensatz zu einem Zufallsrhythmus strukturierter und enthält interessante Teilmuster. Diese Rhythmusstruktur kann durch Polyrhythmik verstärkt werden, z.B.:



Diese Struktur illustriert das Sieb des ERASTHOSTENES, durch das alle Vielfachen der bisher gefundenen Primzahlen in der natürlichen Zahlenfolge fallen.

Wir haben verschiedene andere Variationen zu diesem Thema untersucht: u.a. tonale Umsetzungen als alternierende Bewegung in polyphoner antiparalleler Stimmführung, wobei die Größe der Intervalle durch die Abstände zwischen den Primzahlen definiert wird.

(3) Der Rhythmus der Zahl

Wir erhalten eine alternative und völlig isomorphe Beschreibung einer rhythmischen Struktur über die Eigenschaften einer unendlichen 0-1-Folge $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$, in der $s_n = 1$ den zeitlichen Einsatz eines musikalischen Ereignisses bezeichnet und die kleinste rhythmische Einheit einem Schritt dieser Folge entspricht.

Die Primzahlen-Folge als 0-1 Sequenz:

0110101000101000101000 1…

Andere mathematischen Objekte können wir ebenso als unendliche 0-1-Folgen darstellen. Die Menge aller Folgen dieser Art stellt einen topologischen Raum (den sogenannten Shiftraum) dar, wenn man die Shifttopologie zugrundelegt. In diesem Raum können wir verschiedene "nahezu periodische" Sequenzen untersuchen, die hochgradig reguläre aber nicht-metrische Rhythmen darstellen (z.B. die MORSE-Folge). Die Binärentwicklung reeller Zahlen erzeugt auf einfache Weise viele interessante 0-1 Folgen, wobei die Darstellung der rationalen Brüche streng metrische Rhythmen liefert:

Die Binärentwicklung irrationaler Zahlen erzeugt nichtperiodische Rhythmen, z.B. die Zahl:

11.001001000011111101101010001000100000101…

(4) Der Klang des Chaos

Die bisher dargestellten Beispiele können mit jedem MIDI-fähigen Musikinstrument leicht umgesetzt werden. Für die folgenden Experimente benötigt man einen D/A-Wandler, der von einem Computer direkt angesteuert wird. Wir benutzen einen IBM/AT zusammen mit einem 16–bit D/AWandler mit einer 40 KHz Abtastrate, kontrolliert durch eine STSC/APL Umgebung, in der Assembler-Funktionen integriert sind.

Wie wir wissen, hat die Differentialgleichung des linearen Oszillators ohne externe Zwangsterme:

$$D^2x(t) + (2\ f)^2x(t) = 0$$

eine reine Sinuswelle der Frequenz f als Lösung:

$x(t) = a \sin(2ft\text{-}ø)$,

wobei die Amplitude a und die Phase ø durch die Anfangsbedingungen x(0) und Dx(0) bestimmt sind. Komplexere Wellenformen erhält man durch Variation der grundlegenden Differentialgleichung. Als einfaches Beispiel kann man den nicht-linearen Oszillator ohne externe Zwangsterme betrachten:

$$D^2x(t) + (2\ f)^2\sin(x(t)) = 0$$

der nicht-sinusförmige Wellenformen mit konstanter Amplitude und Periode erzeugt, sowie ein Frequenzspektrum der Form w, 3w, 5w, …, wobei die Frequenz w von den Anfangsbedingungenabhängt.

Zur Zeit wird von vielen Wissenschaftlern das Verhalten chaotischer Systeme in solchen Differentialgleichungen untersucht. Eine Gleichung des Impakt-Oszillators können wir schreiben:

$$D^2x(t) + (2z\ /h\ )D(x(t)) = (1/4h\ ^2)\sin(2\ ft)$$

Es handelt sich hierbei um einen erregten Oszillator, der chaotische Wellenformen mit approximativen Teiltönen erzeugt, die von den Parametern z und h abhängen. Steady state-Trajektorien wurden in THOMSON und STEWART (1986), S. 318 abgebildet, wo das Verhalten dieser Systeme im Detail untersucht wird.

Es gilt im allgemeinen, daß jeder Oszillator untersucht werden kann, indem man die Trajektorien beobachtet, die durch eine stabile numerische Integrationsroutine bei gegebenen Bedingungen durch das System erzeugt werden. Mit Hilfe eines D/A-Wandlers kann diese so gewonnene Folge von reellen Zahlen in ein Audiosignal umgewandelt werden.

Chaotische Lösungen neigen dazu, sehr eigenartige Klänge mit starkem Geräuschanteil oder Klänge zu erzeugen, die sich zwischen verschiedenen Wellenformen in irregulärer und nicht vorhersehbarer Weise bewegen. Wir erhalten erstaunliche Effekte durch langsame Veränderungen der Parameter.

Die Anwendung dynamischer Systeme zur Klangsynthese, so faszinierend sie erscheinen mag, erzeugt keine vorhersagbaren Ergebnisse. Wir bevorzugen daher u.a. eine Methode zur Klangerzeugung, die sich an die Theorie der Fraktale anlehnt, die sogenannte additive fraktale Synthese. Die grundlegende Idee kann man verstehen, wenn man einen Baum betrachtet. Approximativ ist der Baum in einem gewissen Sinne selbst-ähnlich, in dem der gesamte Baum durch eine affine kontrahierende Transformation auf echte Teilbäume abgebildet wird. Diese Methode kann auch auf Klänge angewendet werden und erzeugt den natürlichen Instrumenten verwandte Klänge. Der Vorteil dieser Klangerzeugung besteht in geringem Speicherbedarf und der Definierbarkeit exakter Loop-Punkte.

(5) Die Entstehung regulärer Strukturen
(simulated annealing)

Stellen wir uns ein bei hoher Temperatur verflüssigtes Metall vor. Bei langsamer Abkühlung des Metalls geht die thermische Bewegung graduell verloren und es ist möglich, daß sich die Atome zu einem perfekten Kristall ordnen, dessen Größe die der einzelnen Atome milliardenfach übertreffen kann. Es existiert ein Algorithmus von METROPOLIS et.al. (1953) und anderen (s.a. PRESS et. al. (1986)), der diese langsame Abkühlung zur Optimierung kombinatorischer Strukturen simuliert.

Eine musikalische Komposition können wir auch so verstehen, daß sie eine Struktur darstellt, die ein gewisses Energieniveau besitzt, das wir z.B. durch die Anzahl der Verletzungen der Regeln des strengen Kontrapunktes definieren können. Dieses Energieniveau kann schrittweise mit dem Ziel gesenkt werden, eine kristalline Struktur mit gewissen Eigenschaften zu erzeugen, die in unserem Fall mit dem strengen Kontrapunkt gleichgesetzt werden kann.

(6) Ein offenes mathematisches Problem

Ein mathematischer Aufsatz wäre ohne ein ungelöstes mathematisches Problem unvollständig. Vielleicht wußten die legendären Pythagoräer die Lösung, wir leider nicht.

In der frühen mehrstimmigen Musik wurden Proportionen bevorzugt, die sich aus Vielfachen nur der ersten drei Primzahlen zusammensetzen. Man stelle sich die Folge aller natürlichen Zahlen $2^a\ 3^b\ 5^c$ der Größe nach hingeschrieben vor:

1 2 3 4 5 6 8 9 10 12 15 16 18 20 24 25 27 30 32 36 40 45 48 50 54 60 64 72 75 80 81 90 96 100 …

Von besonderem Interesse sind historisch nun solche Proportionen, deren Zähler und Nenner sich nur um 1 unterscheiden (genus superparticularis), alle anderen entstehen aus diesen durch Multiplikation. In obiger Folge entspricht eine solche Proportion der Form n, n+1:

1/2, 2/3, 3/4, 4/5, 5/6, 8/9, 9/10, 15/16, 24/25, 80/81.

Wir vermuten, daß außer diesen zehn Paaren keine weiteren existieren. Jedenfalls haben wir in der Folge bis 10^{12} kein anderes derartiges Paar mehr gefunden. Ein Beweis dieser Vermutung ist nicht bekannt (und wohl auch nicht ganz einfach).

(7) Der Klang eines Mathematikers

Der Titel dieses Aufsatzes kann natürlich auch ganz anders interpretiert werden. Da jegliche Mathematik allein von einem sterblichen Verstand ersonnen wird, können wir auch den enzephalographischen Signalen zuhören, etwa einer Stereoaufzeichnung der Hirnstromwellen beider Hemisphären, z.B. denen eines Mathematikers. Diese Signale werden üblicherweise während einer REM-Phase aufgenommen (wir hoffen, daß unser Mathematiker unbewußt in seinem Traum Visionen hervorragender mathematischer Erkenntnisse erfährt) und können durch eine Transponierung um 7 Oktaven in den hörbaren Bereich versetzt werden. Dieser Klang konnte z.B. künstlerisch bearbeitet werden, um einen 8-Kanal Raumklang zu erzeugen, der verblüffend an einen Feuersturm erinnert (Düsseldorfer Schauspielhaus: H. Ibsen "Gespenster", 1988). In einem gewissen Sinne können wir hier von dem wahren Klang der Mathematik sprechen.